Exercice 1

Soit $f : A \to B$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Déterminer dans chaque cas si la fonction est injective, surjective, bijective.

a) $A = B = \mathbb{N}$

Injective : si $n^2 = m^2$ avec $m, n \geqslant 0$ alors $m = n$.

Non surjective : par exemple 2 n'a pas d'antécédent.

Donc forcément non bijective.

b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$

Non injective : par exemple $f(1) = f(-1)$.

Non surjective : par exemple 2 n'a pas d'antécédent.

Donc forcément non bijective.

c) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_+$

Non injective : par exemple $f(1) = f(-1)$.

Surjective : pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $f(\sqrt{y}) = y$

Donc forcément non bijective.

(Si on prend $A = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{R}_+$ on a une bijection : sa fonction réciproque est la fonction $\sqrt{\ }$ usuelle.)

d) $A = B = \mathbb{C}$

Non injective : par exemple $f(1) = f(-1)$.

Surjective : tout nombre complexe w admet au moins une (en fait deux si $w \neq 0$) racines carrées.

Donc globalement non bijective.

e) $A = B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^5 = 1\}$

Bijective ! Si on note $\zeta = e^{2\pi i/5}$, on a en notation sur deux lignes :

$$f = \begin{bmatrix} 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta & \zeta^3 \end{bmatrix}$$

f) $A = B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^6 = 1\}$

Non bijective (non injective, non surjective) : en notant $\omega = e^{\pi i/3}$, cette fois on a $-1 = \omega^3 \in A$.

$$f = \begin{bmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta)$.

a) f est-elle injective ? surjective ?

Ni l'un ni l'autre.

Non injective : par exemple $f(0, 1) = f(1, 0)$. De façon générale, $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$.

Non surjective : par exemple $(0, 1)$ n'est pas de la forme $f(\alpha, \beta)$

b) Proposer des sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la restriction $f : A \to B$ est bijective ; et expliciter la fonction réciproque f^{-1}.

Le "meilleur" choix est de prendre quelque chose comme

$$A = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \alpha \geqslant \beta\}$$

pour régler le problème de manque d'inejctivité et

$$B = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, X^2 - 4Y \geqslant 0\}$$

pour régler le problème de surjectivité. En effet : étant donné $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, chercher (α, β) pour lequel $f(\alpha, \beta) = (X, Y)$ revient à chercher α et β deux nombres réels pour lesquels

$$X = \alpha + \beta, \qquad Y = \alpha \cdot \beta,$$

c'est à dire deux racines du polynôme

$$(x - \alpha) \cdot (x - \beta) = x^2 - Xx + Y.$$

Si $\Delta = (-X)^2 - 4Y \geqslant 0$ on trouve les deux solutions

$$\alpha = \frac{X + \sqrt{\Delta}}{2} \geqslant \beta = \frac{X - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Exercice 3

Soient A, B, C trois ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$. Pour chaque proposition, donner un argument ou un contrexemple.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

   vrai

2. Si $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injectives.

   faux : g n'est pas forcément injective

3. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

   vrai

4. Si $g \circ f$ est surjective, alors f et g sont surjectives.

   faux : g n'est pas forcément surjective

5. Si f est injective et g surjective, alors $g \circ f$ est bijective.

   faux

6. Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

   vrai